

两类3正则图中的完美匹配数*

唐保祥¹, 任 韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001;
2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘 要: 完美匹配的计数理论在量子化学、晶体物理学和计算机科学中都有重要的应用, 对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义。但是, 一般图的完美匹配计数问题已经被证实为 NP—难问题。Lovász 和 Plummer 曾提出关于完美匹配计数的一个猜想: 任意 2 边连通 3 正则图都有指数多个完美匹配。用划分、求和, 再嵌套递推的方法给出了 2 类特殊图完美匹配数目的显式表达式, 从而验证了 Lovász 和 Plummer 猜想在这 2 类图上的正确性。

关键词: 完美匹配; 线性递推式; 特征方程

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2014) 05-0054-05

The Number of Perfect Matchings in Two Types of 3-Regular Graph

TANG Baoxiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: It's an important application for perfect matching counting theories in quantum chemistry, crystal physics and computer science. The research for perfect matching counting theories has a quite important theoretical value and realistic meanings. But the counting problem of perfect matching for general graphs has been proved to be NP—hard. Lovász and Plummer proposed a conjecture on this problem: every 2-edge-connected cubic graph has at least exponential perfect matchings. By applying differentiation, summation and re-nested recursive calculation, several counting formulas of the perfect matching for two specific types of graphs are given. And the results indicate that the conjecture of Lovász and Plummer is true in the case of these two types of graphs.

Key words: perfect matching; linear recurrence relation; characteristic equation

图的完美匹配的理论在很多领域有广泛应用, 例如: 积和式在计算机科学, 特别是计算复杂性理论中有重要的地位, 二分图的完美匹配的数目可以方便地表示为计算积和式的值; 共轭分子图是否具有完美匹配对芳香族系统的稳定性是极其重要的; 图的完美匹配数也是估计共振能量和 π —电子能量, 计算鲍林键级的重要指标等^[1-5]。遗憾的是, 1979 年 Valiant 证明了, 一个图 (即使是偶图) 的

完美匹配计数是 NP—难问题^[6], 若 $NP \neq P$, 即这个问题不存在多项式解法获得最优解。Lovász 和 Plummer 曾提出关于完美匹配计数的一个猜想: 任意 2 边连通 3 正则图都有指数多个完美匹配^[7]。文献 [8] 中给出了 3 类 2 边连通 3 正则的图, 它们都有指数多个不同的完美匹配。本文给出了 2 类 2 边连通 3 正则图完美匹配数目的计算公式, 验证了 Lovász 和 Plummer 猜想在这 2 类图上的正确性。

* 收稿日期: 2013-12-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171114)

作者简介: 唐保祥 (1961 年生), 男; 研究方向: 图论和组合数学; E-mail: tbx0618@sina.com

1 相关概念

定义 1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配。

设 $n(n \geq 2)$ 个长是 6 的圈为 $C_6^i = v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i6}v_{i1}(i = 1, 2, \dots, n)$, 连接圈 C_6^j 与 C_6^{j+1} 的顶点 v_{j3} 与 $v_{j+1,6}$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$), 圈 C_6^i 加边 $u_{i1}v_{i1}, u_{i2}v_{i2}, u_{i4}v_{i4}, u_{i5}v_{i5}(i = 1, 2, \dots, n)$, 圈 C_6^1 与 C_6^n 分别加边 $u_{16}v_{16}$ 和 $u_{n3}v_{n3}$, 再分别连接顶点 u_{i1} 与 u_{i2}, u_{i4} 与 $u_{i5}(i = 1, 2, \dots, n)$, u_{j2} 与 $u_{j+1,1}(j = 1, 2, \dots, n-1)$, u_{11} 与 u_{16}, u_{15} 与 u_{16}, u_{n2} 与 u_{n3}, u_{n3} 与 u_{n4} , 这样所得到的图记为 $3-nC_6$, 如图 1 所示。

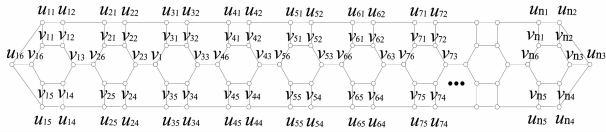


图 1 $3-nC_6$ 图

Fig. 1 Figure of $3-nC_6$

设 $2n$ 个长是 4 的圈为 $C_{i1}:u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i1}, C_{i2}:v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i1}(i = 1, 2, \dots, n)$ 。连接圈 C_{i1} 和 C_{i2} 的顶点 u_{i1} 与 v_{i1}, u_{i3} 与 v_{i3} ; 连接 C_{i1}, C_{i2} 与 $C_{i+1,1}, C_{i+1,2}$ 的顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,4}$, 与 $(i = 1, 2, \dots, n-1)$; 再连接圈 C_{11} 和 C_{12} 的顶点 u_{14} 与 v_{14} , 圈 C_{n1} 和 C_{n2} 的顶点 u_{n2} 与 v_{n2} 。这样所得的图记为 $2-2nC_4$, 如图 2 所示。

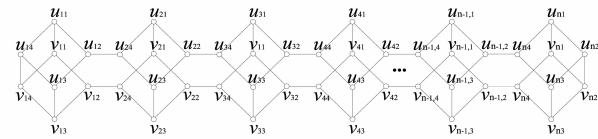


图 2 $2-2nC_4$ 图

Fig. 2 Figure of $2-2nC_4$

2 主要结果及其证明

定理 1 $\sigma(n)$ 表示图 $3-nC_6$ 的完美匹配的数目, 则

$$\sigma(n) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \cdot (4+2\sqrt{2})^n + \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \cdot (4-2\sqrt{2})^n$$

证明 图 $3-nC_6$ 是 3 正则 3 连通图, 显然存在完美匹配。 $\sigma(n)$ 表示图 $3-nC_6$ 的完美匹配数。设图 $G, S \subseteq V(G)$, 记 $G' = G - S$ 为图 G 删除 S 中的顶点所得到的图。设 $S_1 = \{u_{11}, u_{15}, u_{16}, v_{11}, v_{15}, v_{16}\}, S_2 = \{u_{11}, u_{14}, u_{15}, u_{16}, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}, S_3 = \{u_{11}, u_{12}, u_{15}, u_{16}, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}\}, G_1 = 3 - (n+1)C_6 - S_1, G_2 = 3 - (n+1)C_6 - S_2, G_3 = 3 - (n+1)C_6 - S_3, G_4 = 3 - (n+1)C_6 - \{u_{16}, v_{16}\}, G_5 = 3 - nC_6 - \{u_{15}, u_{16}\}, G_6 = 3 - nC_6 - \{u_{11}, u_{16}\}$, 图 G_1, G_2, \dots, G_6 如图 3-8 所示。

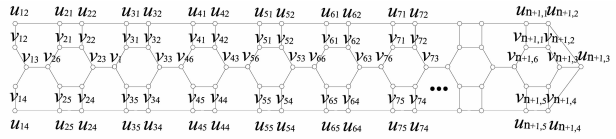


图 3 G_1 图

Fig. 3 Figure of G_1

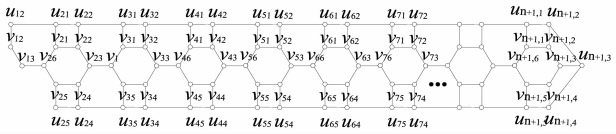


图 4 G_2 图

Fig. 4 Figure of G_2

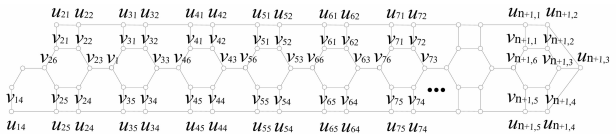


图 5 G_3 图

Fig. 5 Figure of G_3

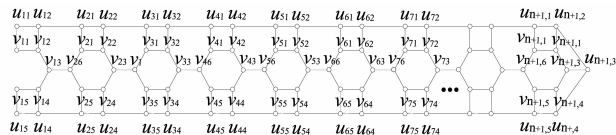


图 6 G_4 图

Fig. 6 Figure of G_4

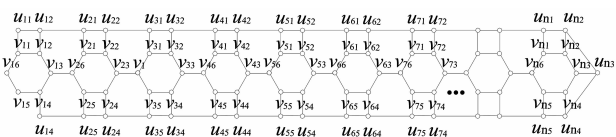


图 7 G_5 图

Fig. 7 Figure of G_5

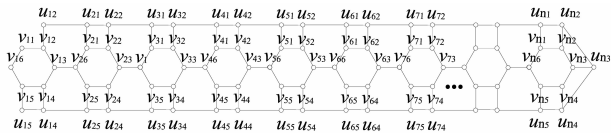


图 8 G_6 图

Fig. 8 Figure of G_6

图 G_1, G_2, \dots, G_6 均含 n 个 6 圈, 显然都有完美匹配, $G_2 \cong G_3, G_5 \cong G_6$ 。设图 G_1, G_2, \dots, G_6 的完美匹配数分别为 $g(n), h(n), \delta(n), \alpha(n), \beta(n), \gamma(n)$, 则 $h(n) = \delta(n), \beta(n) = \gamma(n)$ 。

由 $\beta(n)$ 的定义, 图 G_1 含边 $u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}, u_{14}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\beta(n)$, 由 $\delta(n)$ 的定义图 G_1 含边 $u_{12}u_{21}$ 的完美匹配数为 $\delta(n), \delta(n) = h(n)$, 所以

$$g(n) = \beta(n) + h(n) \quad (1)$$

由 $\beta(n)$ 的定义, 图 G_2 含边 $u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}$ 的完美匹配数为 $\beta(n)$, 由 $\alpha(n)$ 的定义图 G_2 含边 $u_{12}v_{12}, v_{13}v_{16}$ 的完美匹配数为 $\alpha(n-1)$, 所以

$$h(n) = \alpha(n-1) + \beta(n) \quad (2)$$

由 $h(n)$ 的定义, 图 G_3 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配数为 $h(n)$, 由 $\alpha(n)$ 的定义图 G_3 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{26}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配数为 $\alpha(n-1)$, 由 $g(n)$ 的定义图 G_3 含边 $u_{11}v_{11}, v_{15}u_{15}$ 的完美匹配数为 $g(n)$, 由 $h(n)$ 的定义图 G_3 含边 $u_{11}v_{11}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配数为 $h(n)$, 所以

$$\alpha(n) = 2h(n) + g(n) + \alpha(n-1) \quad (3)$$

由 $\beta(n)$ 的定义, 图 G_5 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{16}, v_{12}v_{13}, v_{15}v_{14}, u_{14}u_{25}$ 的完美匹配数为 $\beta(n-1)$; 由 $h(n)$ 的定义, 图 G_5 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{16}v_{15}$ 的完美匹配数为 $h(n-1)$; 由 $g(n)$ 的定义, 图 G_5 含边 $u_{11}v_{11}, v_{16}v_{15}$ 的完美匹配数为 $g(n-1)$ 。所以

$$\beta(n) = g(n-1) + h(n-1) + \beta(n-1) \quad (4)$$

由 $\gamma(n)$ 的定义, 图 $3-nC_6$ 含边 $u_{11}u_{16}$ 的完美匹配数为 $\gamma(n)$; 由 $\alpha(n)$ 的定义图 $3-nC_6$ 含边 $u_{16}v_{16}$ 的完美匹配数为 $\alpha(n-1)$, 由 $\beta(n)$ 的定义, 图 $3-nC_6$ 含边 $u_{15}u_{16}$ 的完美匹配数为 $\beta(n), \beta(n) = \gamma(n)$ 。所以

$$\sigma(n) = 2\beta(n) + \alpha(n-1) \quad (5)$$

由 (1) - (5) 式得

$$\sigma(n) = 2g(n-1) + 2h(n-1) + 2\beta(n-1) + \alpha(n-1) \quad (6)$$

$$\sigma(n) = 8\beta(n-1) + 4\alpha(n-2) + \alpha(n-1) \quad (7)$$

由 (4) 和 (6) 式得

$$2\beta(n) = \sigma(n) - \alpha(n-1) \quad (8)$$

由 (7) 和 (8) 式得

$$\sigma(n) = 4\sigma(n-1) + \alpha(n-1) \quad (9)$$

由 (1), (2), (3) 和 (8) 式得

$$\alpha(n) = 2\sigma(n) + 2\alpha(n-1) \quad (10)$$

由 (9) 和 (10) 式得

$$\sigma(n) = 6\sigma(n-1) + 2\alpha(n-2) \quad (11)$$

$$\sigma(n-1) = 4\sigma(n-2) + \alpha(n-2) \quad (12)$$

(11) - 2 × (12) 式得

$$\sigma(n) = 8\sigma(n-1) - 8\sigma(n-2) \quad (13)$$

线性递推式 (13) 的特征方程的根为 $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$, 所以线性递推式 (13) 的通解为 $\sigma(n) = c_1(4 + 2\sqrt{2})^n + c_2(4 - 2\sqrt{2})^n$ 。

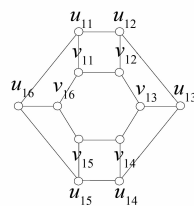


图 9 $3-1 \times C_6$ 图

Fig. 9 Figure of $3-1 \times C_6$

如图 9 所示, 图 $3-1 \times C_6$ 含边 $u_{11}u_{16}, v_{11}v_{16}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{11}u_{16}, v_{11}v_{12}, u_{12}u_{13}, v_{13}v_{14}, u_{14}u_{15}, v_{15}v_{16}$ 完美匹配有 1 个, 含边 $u_{16}v_{16}$ 的完美匹配有 8 个, 含边 $u_{16}u_{15}, v_{16}v_{15}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{16}u_{16}, v_{15}v_{14}, u_{14}u_{13}, v_{13}v_{12}, u_{11}u_{12}, v_{11}v_{16}$ 的完美匹配有 1 个, 所以 $\sigma(1) = 20$ 。

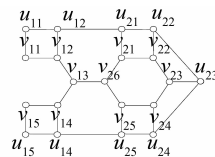


图 10 G_7 图

Fig. 10 Figure of G_7

如图 10 所示, 图 G_7 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{26}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配有 8 个, 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{26}, v_{15}u_{15}, v_{14}u_{14}$ 的完美匹配有 8 个, 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}, v_{15}u_{15}$,

$u_{14}u_{25}, v_{21}v_{26}, u_{21}u_{22}, v_{22}v_{23}, u_{23}u_{24}, v_{24}v_{25}$ 的完美匹配有 1 个, 含边 $u_{11}u_{12}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}$,

$v_{15}u_{15}, u_{14}u_{25}, v_{25}v_{26}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, v_{13}v_{26}, u_{14}v_{14}, u_{15}v_{15}$ 的完美匹配有 8 个,

含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, v_{13}v_{14}, v_{15}u_{15}, u_{14}u_{25}, v_{21}v_{26}, u_{21}u_{22}, v_{22}v_{23}, u_{23}u_{24}, v_{24}v_{25}$ 的完美匹配有 1 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, v_{13}v_{14}, v_{15}u_{15}, u_{14}u_{25}, v_{25}v_{26}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}v_{12}, v_{13}v_{26}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配有 8 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}, v_{15}u_{15}, v_{14}u_{14}, v_{21}v_{26}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}, v_{15}u_{15}, v_{14}u_{14}, v_{25}v_{26}, u_{25}u_{24}, v_{24}v_{23}, u_{23}u_{22}, v_{22}v_{21}$ 的完美匹配有 1 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}, v_{26}v_{21}$ 的完美匹配有 5 个, 含边 $u_{11}v_{11}, u_{12}u_{21}, v_{12}v_{13}, v_{15}v_{14}, u_{15}u_{14}, v_{25}v_{26}, u_{25}u_{24}, v_{24}v_{23}, u_{23}u_{22}, v_{22}v_{21}$ 的完美匹配有 1 个, 所以, $\alpha(1) = 56$ 。因此, 由 (9) 式得 $\sigma(2) = 136$ 。

线性递推式 (13) 满足 $\alpha(1) = 56, \sigma(2) = 136$ 的解为

$$\sigma(n) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \cdot (4 + 2\sqrt{2})^n + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{2})^n$$

定理 2 $\psi(n)$ 表示图 $2 - 2nC_4$ 的完美匹配的数目, 则 $\psi(n) = 9 \cdot 5^{n-1}$ 。

证明 图 $2 - 2nC_4$ 是 3 正则 2 连通图, 显然存在完美匹配。 $\psi(n)$ 表示图 $2 - 2nC_4$ 的完美匹配数。为了求 $\psi(n)$, 先定义一个图 G_8 和 G_9 , 并求其完美匹配的数目。删除图 $2 - 2nC_4$ 的边 $u_{14}v_{14}$ 都得到的图记为 G_8 ; 将长为 6 的圈 $u_1v_1w_1w_2v_2u_1$ 的顶点 v_1, v_2 与圈 C_{11} 和 C_{12} 的顶点 u_{14}, v_{14} 分别连接一条边得到的图记为 G_9 , 如图 11-12 所示。

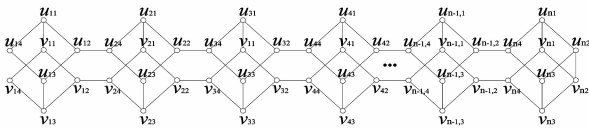


图 11 G_8 图

Fig. 11 Figure of G_8

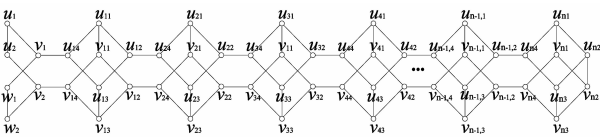


图 12 G_9 图

Fig. 12 Figure of G_9

显然图 G_8 和 G_9 均有完美匹配, 图 G_8 和 G_9 的完美匹配数分别记为 $\lambda(n)$ 和 $\pi(n)$ 。

图 $2 - 2nC_4$ 的完美匹配按饱和和顶点 u_{14} 的情况

可划分为如下 7 种情形。

情形 1: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}u_{14}, v_{11}v_{14}, u_{12}u_{13}, v_{12}v_{13}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 2: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}u_{14}, v_{11}v_{14}, u_{12}u_{24}, v_{12}v_{24}, u_{13}v_{13}$ 的完美匹配数为 $\pi(n - 2)$;

情形 3: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}u_{14}, u_{12}u_{13}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 4: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{12}v_{13}, v_{11}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 5: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 6: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{11}v_{11}, u_{13}u_{14}, v_{13}v_{14}, u_{12}u_{24}, v_{12}v_{24}$ 的完美匹配数为 $\pi(n - 2)$;

情形 7: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 $2 - 2nC_4$ 含边 $u_{14}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\pi(n - 1)$ 。

故

$$\psi(n) = 4\lambda(n - 1) + \pi(n - 1) + 2\pi(n - 2) \quad (14)$$

求 $\lambda(n)$ 。图 G_8 的完美匹配按饱和和顶点 u_{14} 的情况可划分为如下 6 种情形。

情形 1: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}u_{14}, v_{11}v_{14}, u_{12}u_{13}, v_{12}v_{13}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 2: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}u_{14}, v_{11}v_{14}, u_{12}u_{24}, v_{12}v_{24}, u_{13}v_{13}$ 的完美匹配数为 $\pi(n - 2)$;

情形 3: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}u_{14}, u_{12}u_{13}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 4: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{12}v_{13}, v_{11}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 5: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{14}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14}$ 的完美匹配数为 $\lambda(n - 1)$;

情形 6: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 G_8 含边 $u_{11}v_{11}, u_{13}u_{14}, v_{13}v_{14}, u_{12}u_{24}, v_{12}v_{24}$ 的完美匹配数为 $\pi(n - 2)$ 。故

$$\lambda(n) = 4\lambda(n - 1) + 2\pi(n - 2) \quad (15)$$

再求 $\pi(n)$ 。图 G_9 的完美匹配按饱和和顶点 u_1 的情况可划分为如下 3 种情形。

情形 1: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_9 含边 u_1v_1, u_2v_2, w_1w_2 的完美匹配数为 $\lambda(n)$;

情形 2: 由 $\lambda(n)$ 的定义, 图 G_9 含边 u_1u_2, v_1w_1, v_2w_2 的完美匹配数为 $\lambda(n)$;

情形 3: 由 $\pi(n)$ 的定义, 图 G_9 含边 $u_1u_2, v_1u_{14}, v_2v_{14}, w_1w_2$ 的完美匹配数为 $\pi(n-1)$ 。

故

$$\pi(n) = 2\lambda(n) + \pi(n-1) \quad (16)$$

由 (14) 和 (15) 式, 得

$$\psi(n) = \lambda(n) + \pi(n-1) \quad (17)$$

由 (14) 和 (16) 式, 得

$$\psi(n) = 6\lambda(n-1) + 3\pi(n-2) \quad (18)$$

由 (17) 和 (18) 式, 得

$$\psi(n) = 3\psi(n-1) + 3\lambda(n-1) \quad (19)$$

由 (15) 和 (17) 式, 得

$$\lambda(n) = 2\psi(n-1) + 2\lambda(n-1) \quad (20)$$

由 (19) 和 (20) 式, 得

$$\psi(n) = 3\psi(n-1) + 6\psi(n-2) + 6\lambda(n-2) \quad (21)$$

由 (19) 式, 得

$$\psi(n-1) = 3\psi(n-2) + 3\lambda(n-2) \quad (22)$$

(21) - 2 × (22) 式, 得 $\psi(n) = 5\psi(n-1)$ 。易知 $n=1$ 时, 图 $2-2 \times 1C_4$ 的完美匹配数为 9, 故 $\psi(1) = 9$, 所以 $\psi(n) = 9 \cdot 5^{n-1}$ 。

参考文献:

- [1] KASTELEYN P W. Dimmer statistics and phase transition [J]. Math Phys, 1963, 4:287-293.
- [2] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent [J]. Theoretical Compute Science, 1979, 8(2): 189-201.
- [3] CYVIN S J, GUTMAN I. Kekué structures in Benzenoid hydrocarbons [M]. Berlin: Springer Press, 1988.
- [4] PLUMMER M D. Matching theory-a sample; form denies to the present [J]. Discrete Mathematics, 1992, 100: 177-219.
- [5] FOURNREI J C. Combinatorics of perfect matchings in planar bipartite graphs and application to tilings [J]. Theoretical Computer Science. 2003, 303: 333-351.
- [6] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent [J]. Theoretical Compute Science, 1979, 8(2): 189-201.
- [7] LOVÁSZ L, PLUMMER M D. Matching theory [M]. New York :North-Holland Press, 1986.
- [8] 唐保祥,任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师范大学学报:自然科学版, 2010, 33(3): 1-6.
- [9] HADWAN M, AYOB M. A constructive shift patterns approach with simulated annealing for nurse rostering problem [C]//Information Technology (ITSim), 2010:1-6.
- [10] 姚仲敏, 自立静, 孟洪颜. 一种透析机自动排台优化算法的实现与应用[J]. 测控技术, 2012, 31(9): 51-55.
- [11] 姚仲敏, 商秀美. 基于 ADO 技术的血液透析全自动排台系统设计[J]. 测控技术, 2010, 29(7): 68-71.
- [12] 白立静. 基于 Android 的血液透析信息系统设计 [D]. 齐齐哈尔:齐齐哈尔大学, 2012.
- [13] 张稳. 网络环境下的血液透析中心信息管理系统设计与实现[J]. 中国医疗设备, 2008, 23(2): 23-26.

(上接第 53 页)

- [5] 李青,张军,张学军. 解决排班问题的多目标优化模型及算法研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(9): 821-824.
- [6] 蒋龙聪,刘江平. 模拟退火算法及其改进[J]. 工程地球物理学报, 2007, 4(2): 135-140.
- [7] SRIDHAR G R, RAO ALLAM APPA, MURALEEDHARAN M V, et al. Electronic medical records and hospital management systems for management of diabetes [J]. Diabetes and Metabolic Syndrome: Clinical Research and Reviews. 2009, 3(1): 55-59.
- [8] WU J J, LIN Y, ZHAN Z H, et al. An ant colony optimization approach for nurse rostering problem [C]//Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2013 IEEE International Conference on 2013: 1672-1676.